CONCOURS ENSAM - ESTP - ENSAIS

Epreuve de Mathématiques 2

durée 4 heures

Exercice 1 :

Soit $E = C^0[-1, 1]$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[-1, 1]$ à valeurs réelles. On considère la fonction u de E définie par $u(x) = 1 - x$ et le sous–espace vectoriel V engendré par les fonctions e_0, e_1 et e_2 de E, linéairement indépendantes, définies par $e_0(x) = 1$, $e_1(x) = \cos(\pi x)$ et $e_2(x) = \sin(\pi x)$.

1) On munit E du produit scalaire classique défini par $(f|g) = \int_{-1}^{1} f(x)\, g(x)\, dx$ et l'on note $\|.\|$ la norme associée.

a) Calculer les composantes par rapport à la base (e_0, e_1, e_2) de V de la projection orthogonale φ de u sur V.

b) Calculer la distance de u à V.

2) a) Montrer que $(f|g)_1 = \int_{-1}^{1} |x|\, f(x)\, g(x)\, dx$ définit un autre produit scalaire sur E. On notera E_1 et V_1 les espaces E et V munis de ce nouveau produit scalaire.

b) Calculer les composantes par rapport à la base (e_0, e_1, e_2) de V_1 de la projection orthogonale φ_1 de u sur V_1.

Exercice 2 :

L'espace $\mathbb{R}^3$ est rapporté à un repère orthonormé direct et muni du produit scalaire habituel noté $(.|.)$. Soit $u : P \in \mathbb{R}^3\backslash\{0\} \mapsto u(P) \in \mathbb{R}$ la fonction définie par $u(x,y,z) = \dfrac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}$. On note Γ la sphère de centre O de rayon 1 et, pour un point $P \in \Gamma$ de coordonnées x, y, z, $n(P)$ le vecteur unitaire de la normale à Γ en P dirigée vers l'extérieur. On note enfin $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ la fonction définie sur Γ par

$$\frac{\partial u}{\partial n} : P \in \Gamma \mapsto \frac{\partial u}{\partial n}(P) = (\operatorname{grad} u(P)|n(P)).$$

1) Calculer $\dfrac{\partial u}{\partial n}(P)$ pour $P \in \Gamma$.

2) Soit $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ un point tel que $\|OA\| = a > 1$. Soit Γ_A la sphère de centre A de rayon 1. On définit sur Γ_A la fonction $\dfrac{\partial u}{\partial n_A}$ par $\dfrac{\partial u}{\partial n_A} : P \in \Gamma_A \mapsto \dfrac{\partial u}{\partial n_A}(P) = (\operatorname{grad} u(P)|n_A(P))$ où $n_A(P)$ est le vecteur unitaire de la normale en P à Γ_A dirigé vers l'extérieur.

a) Décrire les ensembles

$$C_0 = \{P \in \Gamma_A \,/\, \frac{\partial u}{\partial n_A}(P) = 0\}$$

$$C_+ = \{P \in \Gamma_A \,/\, \frac{\partial u}{\partial n_A}(P) > 0\}, \qquad C_- = \{P \in \Gamma_A \,/\, \frac{\partial u}{\partial n_A}(P) < 0\}.$$

On donnera pour C_0 une solution géométrique et une solution analytique.

b) Donner les composantes d'un vecteur unitaire $t(P)$ de la tangente à C_0 en P.

Exercice 3 :

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit $a > 0$ une constante réelle et u un paramètre décrivant $\mathbb{R}$. On considère un point variable M défini par ses coordonnées $(a\cos u, a \sin u)$ et par C le cercle décrit par le point M.

1) a) On désigne par P et Q les projections orthogonales de M sur les axes et par H le projeté orthogonal de l'origine sur la droite PQ. Déterminer, en fonction de u, les coordonnées du point H.

b) La tangente en M au cercle C coupe, en général, les axes en U et V. Soit alors W le point se projetant orthogonalement en U et V sur les axes. Déterminer, en fonction de u, les coordonnées du point W.
Que peut–on dire de la position relative des points O, H, W ?

2) Soit R la courbe décrite par W (que l'on ne demande pas de construire). On mène par O la perpendiculaire à la tangente à R en W, cette droite coupant la droite PQ en I.

a) Déterminer, en fonction de u, les coordonnées du point I.

b) Montrer que les droites PQ et IM sont perpendiculaires.

Exercice 4 :

Soit $\mathbb{R}^n$ muni d'une norme notée $||.||$ et $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application telle que, pour tous X et Y de $\mathbb{R}^n$, on ait

$$||T(X) - T(Y)|| \leqslant \alpha ||X - Y||$$

où $\alpha \in]0, 1[$ est une constante. On définit une suite de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ par la donnée d'un vecteur initial $X^{(0)}$ et $X^{(k+1)} = T(X^{(k)})$ pour $k = 0, 1, 2 \ldots$

1) a) Montrer que

$$||X^{(k+1)} - X^{(k)}|| \leqslant \alpha^k ||X^{(1)} - X^{(0)}||.$$

b) En déduire que la suite $(X^{(k)})$ est une suite de Cauchy de $\mathbb{R}^n$ et qu'elle a une limite notée $\overline{X}$.

b) Montrer que $\overline{X}$ est solution de $X = T(X)$.

c) Montrer que $\overline{X}$ est l'unique solution de cette équation.

2) On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme $||X|| = \max_{i=1}^{n} |x_i|$ où les x_i sont les composantes du vecteur X.
Soit $C = (c_{i,j})$ une matrice carrée d'ordre n à coefficients réels. On pose $T(X) = CX + b$, où $b \in \mathbb{R}^n$.

a) Montrer que pour X et Y dans $\mathbb{R}^n$, on a

$$||T(X) - T(Y)|| \leqslant \alpha ||X - Y||$$

où α ~~$\in]0, 1[$~~ est une constante à expliciter.

b) En déduire que si $\max_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |c_{i,j}| < 1$, alors la suite $(X^{(k)})$ définie par la donnée de $X^{(0)}$ et la relation de récurrence $X^{(k+1)} = T(X^{(k)})$ converge vers l'unique solution de l'équation définie par le système $X = CX + b$.

3) On veut résoudre dans $\mathbb{R}^3$ l'équation $AX = b$ définie par

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & -1 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 8 \\ -10 \\ -9 \end{pmatrix}.$$

a) Montrer que cette équation est équivalente à

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 1/4 \\ -1/4 & 0 & 1/4 \\ 1/5 & -1/5 & 0 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 2 \\ -5/2 \\ -9/5 \end{pmatrix}.$$

b) Calculer les trois premiers itérés $X^{(1)}$, $X^{(2)}$ et $X^{(3)}$ obtenus par l'algorithme ci-dessus à partir du choix $X^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

c) Calculer la solution $\overline{X}$ ainsi que $||\overline{X} - X^{(i)}||$ pour $i = 0$ à 3.

4) On veut trouver une solution approchée d'une équation $AX = b$ par le procédé de la troisième question lorsque $n = 1000$. Les coefficients de A sont donnés (pour i et $j = 1$ à n) par

$$a_{i,j} = \begin{cases} 2 + \sigma_i & \text{si } i = j \\ -1 & \text{si } i = j + 1 \text{ ou } i = j - 1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

où les σ_i sont des réels strictement positifs et les composantes de b sont notées b_i ($i = 1$ à n). Décrire un algorithme calculant les itérés successifs jusqu'à $X^{(20)}$ dont on fera imprimer la valeur, à l'exclusion des précédents, à partir de la donnée $X^{(0)} = 0$, vecteur nul de $\mathbb{R}^n$.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail